ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SẦM THỊ HẰNG

GIẢI GẦN ĐÚNG MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

SẦM THỊ HẰNG

GIẢI GẦN ĐÚNG MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN FOURIER

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS.NGUYỄN THỊ NGÂN

Thái Nguyên - Năm 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới TS.Nguyễn Thị Ngân, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên cùng các Phòng- Ban chức năng của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các Quý Thầy Cô giảng dạy lớp cao học K23 (2015-2017) trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Nhân dịp này tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và thức hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn!

Mục lục

Mở đầu

Phương trình cặp và hệ phương trình cặp xuất hiện khi giải bài toán hỗn hợp của Vật lý toán như các bài toán về khe hở, vết nứt, về dị tật môi trường, về tiếp xúc của lý thuyết đàn hồi... Trong khoảng một vài thập niên gần đây, nhiều nhà Toán học trên thế giới quan tâm đến vấn đề tính giải được của phương trình cặp. Gần đây Nguyễn Văn Ngọc và Nguyễn Thị Ngân cũng đã nghiên cứu về tính giải được của một số hệ phương trình cặp tích phân Fourier xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp của phương trình điều hòa và phương trình song điều hòa.

Khi nghiên cứu tính giải được của hệ phương trình cặp tích phân Fourier người ta đã biến đổi về hệ phương trình tích phân kì dị nhân Cauchy. Lý thuyết các phương trình tích phân kì dị nhân Cauchy đã được hoàn thiện ở nửa đầu thế kỉ 20. Các phương pháp giải gần đúng bao gồm các phương pháp cầu phương trực tiếp, phương pháp nội suy bằng phương pháp Lagrange, phương pháp sắp xếp thứ tự, phương pháp đa thức trực giao.

Với mong muốn được giải gần đúng một hệ phương trình cặp tích phân Fourier, chúng tôi chọn đề tài "Giải gần đúng một hệ phương trình cặp tích phân Fourier". Luận văn ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo gồm có hai chương nội dung.

Chương một trình bày tổng quan một số kiến thức cơ bản về toán tử tích phân, phương trình tích phân, các đa thức Chebyshev, hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính, biến đổi Fourier của các hàm cơ bản giảm nhanh, biến đổi Fourier của các hàm suy rộng tăng chậm, các không gian Sobolev, các không gian Sobolev vectơ, phiếm hàm tuyến tính liên tục, toán tử giả vi phân vectơ.

Chương hai trình bày về tính giải được của một hệ phương trình cặp tích phân với phép biến đổi Fourier và giải gần đúng hệ phương trình cặp tích phân Fourier. Mục 2.1 trình bày về tính giải được của một hệ phương trình cặp tích phân với phép biến đổi Fourier xuất hiện khi giải bài toán biên hỗn hợp của phương trình điều hòa, các Định lí 2.1.1, Định lý 2.1.3 trình bày về tính tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình cặp tích phân Fourier, đưa hệ phương trình cặp tích phân Fourier về hệ phương trình tích phân kì dị nhân Cauchy, sau đó đưa hệ phương trình tích phân kì dị nhân Cauchy về hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính. Mục 2.2 thực hiện giải gần đúng một hệ phương trình cặp tích phân Fourier với các bước: Đưa hệ phương trình tích phân Fourier về dạng không thứ nguyên; tính gần đúng ma trận hạch của hệ phương trình tích phân Fourier; thực hiện giải gần đúng hệ vô hạn các phương trình đại số tuyến tính đã được chặt cụt đến N=6, sau đó tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình tích phân Fourier.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Nguyễn Thị Ngân. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành sâu sắc tới cô giáo hướng dẫn, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành được khóa học của mình.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Toán tử tích phân kì dị trong không gian L^2_ρ

1.1.1 Không gian L^2_ρ

Định nghĩa 1.1.1. [3]. Với $a < x < b$ xét hàm trọng

$$\rho(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta, \ \ \alpha, \beta > -1.$$

Kí hiệu $L^2_\rho(a,b)$ là tập của tất cả các hàm $u(x)$ bình phương khả tích với trọng ρ, nghĩa là

$$||u|| := \left(\int_a^b \rho(x) |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.1}$$

Tích vô hướng trong $L^2_\rho(a,b)$ được xác định bởi công thức

$$(u,v)_\rho := \int_a^b \rho(x) u(x) \overline{v(x)} dx. \tag{1.2}$$

Rõ ràng với chuẩn (1.1) và tích vô hướng (1.2) thì $L^2_\rho(a,b)$ là một không gian Hilbert.

1.1.2 Toán tử tích phân kì dị

Trong không gian $L^2_\rho(a,b)$, xét toán tử

$$S_J[u](x) = \frac{1}{i\pi} \int_a^b \frac{u(y)dy}{y-x}, x \in J := (a,b), \tag{1.3}$$

trong đó tích phân được hiểu theo giá trị chính Cauchy.

Định lý 1.1.2. [3]. *Với* $\rho(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$, $-1 < \alpha, \beta < 1$, $-\infty < a < b < \infty$ *thì toán tử* S_J *bị chặn, do đó là liên tục trong* $L^2_\rho(a,b)$.

1.2 Phương trình tích phân

1.2.1 Định nghĩa phương trình tích phân

Định nghĩa 1.2.1. Phương trình tích phân là phương trình mà ẩn hàm chưa biết nằm trong dấu tích phân.

Ví dụ 1. *Với* $a \le s, t \le b$ *ta có các phương trình tích phân:*

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) g(s) ds, \tag{1.4}$$

$$g(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) g(s) ds, \tag{1.5}$$

$$g(t) = \lambda \int_a^b (K(t,s))^2 ds, \tag{1.6}$$

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) g(s) ds. \tag{1.7}$$

Thấy rằng:
+ Hàm ẩn $g(t)$ phải tìm có thể chỉ nằm trong dấu tích phân có thể nằm ngoài dấu tích phân.
+ Một phương trình tích phân được gọi là tuyến tính nếu hàm phải tìm là bậc 1 (ví dụ các phương trình (1.4) và (1.5) là tuyến tính còn (1.6) là không phải).
+ Bằng biến đổi thích hợp, một phương trình tích phân bao giờ cũng đưa được về dạng $(A - \lambda I)g = f$, trong đó A là toán tử tích phân, khi đó nếu A là toán tử tuyến tính thì phương trình tích phân đó là tuyến tính.